

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')  
ΔΕΥΤΕΡΑ 18 ΜΑΪΟΥ 2009  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Μονάδες 10**

- B.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  ( $k \leq n$ ), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ .

**Μονάδες 5**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$$

**Μονάδες 2**

- β.** Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ. Για τη συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu x$  ισχύει ότι  
 $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$

**Μονάδες 2**

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

**Μονάδες 2**

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i=1,2,3,4$  μιας μεταβλητής  $X$  με αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$ ,  $i=1,2,3,4$ . Η συχνότητα  $v_2$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2=3$  είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με  $\bar{x}=4$ .

$x_i$	$v_i$
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι  $v_2=7$ .

**Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9.

**Μονάδες 9**

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής  $X$  είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι  $\sqrt{4,9} \approx 2,2$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=x^3-6x^2+ax-7$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

**α.** Να δείξετε ότι  $a=9$

**Μονάδες 7**

**β.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

**Μονάδες 8**

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=-3x$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x)=\ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$ ,  $x > 0$  όπου  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός.

**A. α.** Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 6**

**β.** Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.

**Μονάδες 6**

**B.** Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης  $f(2)$ ,  $f(4)$ ,  $f(8)$ ,  $f(3)$  και  $f(5)$  είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ .

**α.** Αν  $R$  είναι το εύρος και  $\delta$  η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

$$R=3+\ln \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

**Μονάδες 7**

- β. Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$  ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το  $\lambda$  παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο  $\Omega$ , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$$

**Μονάδες 6**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>:

A. Θεωρία (σελ. 150 σχολ. βιβλίο )

B. Θεωρία (σελ. 65 σχολ. βιβλίο)

Γ.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varepsilon$
$\Lambda$	$\Sigma$	$\Lambda$	$\Lambda$	$\Sigma$

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:

A. Είναι

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 v_i x_i / v \Rightarrow \bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4}{v} \Rightarrow 4 = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot v_2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + v_2 + 3 + 4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 = \frac{12 + 3v_2 + 15 + 32}{13 + v_2} \Rightarrow 4(13 + v_2) = 59 + 3v_2 \Rightarrow 52 + 4v_2 = 59 + 3v_2 \Rightarrow v_2 = 7$$

B. Είναι:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{v_1 (x_1 - \bar{x})^2 + v_2 (x_2 - \bar{x})^2 + v_3 (x_3 - \bar{x})^2 + v_4 (x_4 - \bar{x})^2}{v}$$
$$= \frac{6(2-4)^2 + 7(3-4)^2 + 3(5-4)^2 + 4(8-4)^2}{6+7+3+4} = \frac{24+7+3+64}{20} = \frac{98}{20} = 4,9$$

Γ.  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4,9}}{4} \approx \frac{2,2}{4} = 55\% > 10\%$

Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>:

A.  $A_f = \square$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\square$  ως πολυωνομική συνάρτηση.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

Έτσι:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x - 24 - 12x + \alpha + 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9$$

B. Για  $x \neq \pm 1$ :

$$\frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-9}{x+1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 9}{x + 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Γ. Έστω  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής. Επειδή η εφαπτόμενη στο Α είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -3x$  θα έχουμε:

$$\lambda = -3 \Rightarrow f'(x_0) = -3 \Rightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Rightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Rightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το  $A(2, f(2))$ .

Όμως,  $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = -5$  οπότε το σημείο επαφής είναι το  $A(2, -5)$ .

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι  $y = f'(2)x + \beta$ , δηλαδή  $y = -3x + \beta$

Όμως το Α ανήκει στην εφαπτομένη, οπότε  $-5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:  $y = -3x + 1$

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>:**

$$A.a \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x} = -\frac{x-2}{2x}$$

Με  $x > 0$ :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Έτσι, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 2]$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[2, +\infty)$ .

β. Η  $f$  παρουσιάζει μέγιστη τιμή:  $f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$

B.a Επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[2, +\infty)$ :

$$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \Rightarrow f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$$

Έτσι προκύπτει ότι το εύρος ισούται με:

$$\begin{aligned} R &= f(2) - f(8) = (\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1) - (\ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) = \\ &= \ln 2 - \ln 8 + 3 = \ln \frac{1}{4} + 3 \end{aligned}$$

Η διάμεσος θα ισούται με:

$$f(4) = \ln 4 - 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

$$\beta. A = \left\{ \lambda \in \Omega \mid 3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \right\} = \left\{ \lambda \in \Omega \mid \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \right\}$$

Επειδή  $\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1,5)$  με  $\lambda \in \Omega$  είναι  $A = \{2,3,4\}$ , Έτσι,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100}$$

