**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$$

Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Μονάδες 2

γ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i\ , \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \qquad x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι α=e

Μονάδες 8

Β. Για α=e,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x t\,f(t)dt, \qquad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \displaystyle\int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2].

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^{\xi} t\,f(t)dt = \xi^2 \int_0^{\alpha} f(t)dt$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο:

Α. Θεωρία – Θεώρημα σελ. 251 σχολ. βιβλίου
Β. Θεωρία – Ορισμός σελ. 213 σχολ. βιβλίου
Γ.

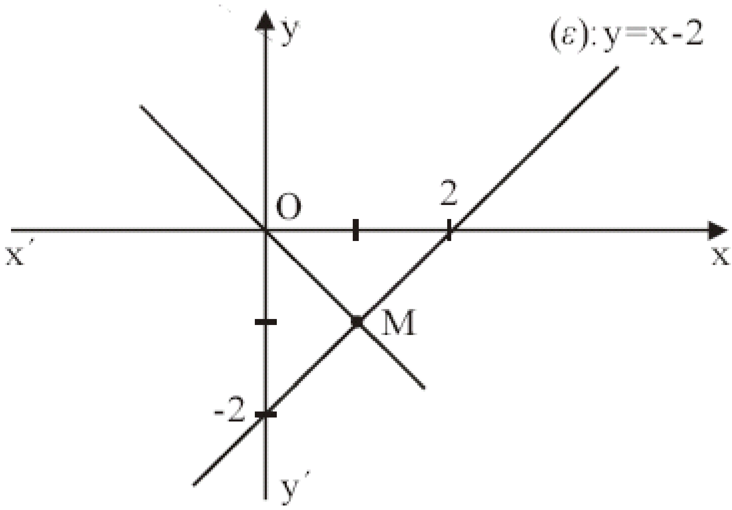
α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Λ

ΘΕΜΑ 2ο:

Α. α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του. Τότε $x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i$

Άρα $x = 2\lambda$ και $y = 2\lambda - 1$. Έτσι όμως $y - x = -2 \Leftrightarrow y = x - 2$

β. Ο μιγαδικός z_0 με το μικρότερο μέτρο έχει εικόνα το σημείο Μ για το οποίο είναι $OM \perp (\varepsilon)$



Αφού

$OM \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{OM} = -1$

Άρα η εξίσωση της ΟΜ είναι η $y = -x$

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ΟΜ και ε (σημείο Μ), προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων $y = -x$, $y = x - 2$.

Επομένως,

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα, το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $M(1, -1)$ και $z_0 = 1 - i$

Β. Έστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$ γράφεται

$$x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 - yi = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \text{ και } y = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \text{ και } y = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -4 \text{ ή } x = 3) \text{ και } y = 1.$$

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$

<u>ΘΕΜΑ 3ο:</u>

Α. Ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$. Δηλαδή, $\alpha^x - \ln(x+1) \geq 1$ για κάθε $x > -1$.

Όμως, $f(0) = 1$, οπότε $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$.

Επομένως, η f παρουσιάζει στη θέση $x = 0$ ολικό, άρα και τοπικό, ελάχιστο στο $f(0) = 1$.

Ακόμα, η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = a^x \ln a - \dfrac{1}{x+1}$, οπότε $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$

Β. α. Για $a = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, +\infty)$, με

$f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ και $f''(x) = \left(e^x - \dfrac{1}{x+1}\right)' = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$

Άρα η f είναι κυρτή.

β. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$ προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, με προφανή ρίζα x=0 που είναι και μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι, αν $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, ενώ αν $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.

Δηλαδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{(f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = (f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1)$ με $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα και στο $[1, 2]$.

$g(1)=-\left(f(\beta)-1\right)=1-f(\beta)=f(0)-f(\beta)<0$ επειδή $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\beta\neq 0$

$g(2)=f(\gamma)-1=f(g)-f(0)>0$ επειδή $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f και $\gamma\neq 0$.

$g(1)\cdot g(2)<0$, επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$ ώστε

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow\left(f(\beta)-1\right)(x_0-2)+\left(f(\gamma)-1\right)(x_0-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(f(\beta)-1\right)(x_0-2)+\left(f(0)-1\right)(x_0-1)}{(x_0-1)(x_0-2)}=0$$

Άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$:

Α. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Επομένως, η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$, οπότε και συνεχής.

Η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ αφού η f είναι συνεχής στον $[0,2]$.

Άρα η G είναι συνεχής στο $(0,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της συνάρτησης G στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1}=0\cdot f(0)=0$$

($\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ αφού η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $\lim_{x\to 0^+}\int_0^x tf(t)\,dt=\int_0^0 tf(t)\,dt=0$

επειδή η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής άρα η $\int_0^x tf(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

Άρα,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)\,dt+3\right)=0-0+3=3$$

Επειδή

$$G(0)=6\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\lim_{t\to 0}\frac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=$$

$$=6\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\frac{1}{2}=3$$

Επομένως, $\lim_{x\to 0^+} G(x) = G(0) = 3$

Άρα, η συνάρτηση G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Επομένως, η G είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Β. Στο διάστημα $(0,2)$ είναι:

- Η συνάρτηση Η παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής με $H'(x) = xf(x)$.
- Η συνάρτηση x είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $(x)' = 1$

Άρα, και η συνάρτηση $\dfrac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\left(\frac{H(x)}{x}\right)' = \frac{H'(x)\cdot x - H(x)(x)'}{x^2} = \frac{xf(x)x - \int_0^x tf(t)\,dt}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x^2}$$

Επίσης, στο ίδιο διάστημα, αφού η f είναι συνεχής συνάρτηση θα είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\int_0^x f(t)\,dt$ με $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

Άρα, η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $G'(x) = f(x) - \dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x^2} - f(x) = -\dfrac{H(x)}{x^2}$, $0 < x < 2$.

Γ. Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, με $G(0) = 3$ (από το ερώτημα Β)

Βρίσκουμε την τιμή της G στη θέση $x = 2$: $G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)\,dt + 3 \quad (1)$

Όμως,

$$\int_0^2 (t-2)f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)\,dt - 2\int_0^2 f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)\,dt = 2\int_0^2 f(t)\,dt \Rightarrow H(2) = 2\int_0^2 f(t)\,dt$$

Έτσι, μέσω της (1):

$$G(2) = \frac{2\int_0^2 f(t)\,dt}{2} - \int_0^2 f(t)\,dt + 3 = 3 = G(0)$$

Ισχύουν επομένως για τη συνάρτηση G οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0$.

Όμως, από το β ερώτημα, $G'(\alpha) = -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}$

Άρα $\mathrm{H}(\alpha) = 0$

Δ.

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $\left[0,\alpha\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\alpha\right)$. Άρα, ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0,\alpha\right)$ τέτοιο ώστε

$$G'\left(\xi\right)=\frac{G\left(\alpha\right)-G\left(0\right)}{\alpha-0} \Leftrightarrow -\frac{H\left(\xi\right)}{\xi^2}=\frac{\frac{\mathrm{H}\left(\alpha\right)}{\alpha}-\int_0^\alpha f\left(t\right)dt+3-3}{\alpha} \underset{\mathrm{H}(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} -\frac{\int_0^\xi tf\left(t\right)dt}{\xi^2}=-\frac{\int_0^\alpha f\left(t\right)dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\int_0^\xi tf\left(t\right)dt=\xi^2\int_0^\alpha f\left(t\right)dt$$