ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y,\ y \in f(A)$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6 \quad \text{και} \quad \left|w-(1-i)\right| = \left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \quad ,$$

για κάθε x > 0 .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1–1

Μονάδες 3

ΟΔΗΓΙΕΣ (*για τους εξεταζόμενους*)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Θέμα 1ο

Α.1 Θεωρία

Α.2 Θεωρία

Β. **α → Σ β → Σ γ → Λ δ → Λ ε → Σ**

Θέμα 2ο

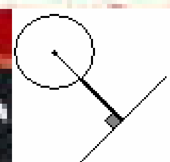
α. $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2}+i\right|\left|z\right| = 6 \Leftrightarrow 3\left|z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|z\right| = 2$, άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho = 2$.

β. Έστω $M(x,y)$ εικόνα του w τότε: $\left|w-(1-i)\right| = \left|w-(3-3i)\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|x+yi-1+i\right| = \left|x+yi-3+3i\right| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-y-4=0$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y-4=0$.

γ. $\left|w\right|_{min} = d(O,\varepsilon) = \dfrac{\left|1\cdot 0-1\cdot 0-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.



δ. $\left|z-w\right|_{min} = \left|d(O,\varepsilon)-\rho\right| = 2\sqrt{2}-2$.

Θέμα 3ο

α. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{d'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$

και $f(0)=0$ επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \ln x + 1$

	0		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ επομένως $f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ επομένως $f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

Δηλαδή $f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right) = \left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$,

οπότε $f\left([0,+\infty)\right) = \left[-\frac{1}{e},0\right] \cup \left[-\frac{1}{e},+\infty\right) = \left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

γ. $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$, $x > 0$.

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση έχει μια ρίζα την $x = \frac{1}{e}$ όπου εμφανίζει και ελάχιστο.

- Αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ και μοναδική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.
- Αν $\alpha = 0$, τότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Αν $\alpha > 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

δ. Για κάθε $x > 0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x, x+1]$, επομένως υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$, ώστε $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

αλλά $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, επομένως f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε:

$\xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

<u>Θέμα 4^ο^</u>

α. Έστω $k = \int_0^2 f(t)dt$, τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 [(10x^3 + 3x)k - 45]dx \Leftrightarrow k = k\left[\frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^2 - 45[x]_0^2 = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 46k - 90 = k \Leftrightarrow k = 2$.

Άρα $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

β. Για το $\lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$ θέτω $-h = u$, τότε

$$\lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{u \to 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} = \lim_{u \to 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} \overset{\text{ορισμός}}{=} g''(x).$$

γ. **i.** $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} \overset{\text{από(β)}}{=} g''(x)$.

Άρα $g''(x) = f(x) + 45 \Leftrightarrow (g'(x))' = (5x^4 + 3x^2)'$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1$ και επειδή $g'(0) = 1$, τότε $c_1 = 1$, δηλαδή $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ οπότε $g'(x) = (x^5 + x^3 + x)'$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$ και επειδή $g(0) = 1$, τότε $c_2 = 1$, δηλαδή $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

ii. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και $1 - 1$.