

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΕΜΠΤΗ 22 ΜΑΪΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x)=c$  (όπου  $x$  πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή  $(c)'=0$ .

**Μονάδες 8**

**B.** Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής  $X$ , αν  $\bar{x} > 0$  και πώς, αν  $\bar{x} < 0$ ;

**Μονάδες 7**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ο τύπος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ισχύει μόνον όταν τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου  $\Omega$  είναι ισοπίθανα.

**Μονάδες 2**

**β.** Η διάμεσος  $\delta$  ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων  $t_1, t_2, \dots, t_n$  είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις αυτές.

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ. Αν  $x > 0$ , τότε  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**Μονάδες 2**

δ. Αν  $x_0$  είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_{\mu x} = \eta_{\mu x_0}.$$

**Μονάδες 2**

ε. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$ .

**Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι  $e^x f'(x) = 2 - x$ .

**Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Α	Β
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

**Μονάδες 5**

- β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

**Μονάδες 5**

- γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις  $S_A$  και  $S_B$  της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

**Μονάδες 7**

- δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.

Δίνεται ότι  $\sqrt{11} \cong 3,3$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

- α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

**Μονάδες 7**

- β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}.$$

**Μονάδες 9**

- γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2} x^2 + P(B) x$$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

(για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

## ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

### Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Θεωρία

B. Θεωρία

Γ.  $\alpha \rightarrow \Lambda$   $\beta \rightarrow \Lambda$   $\gamma \rightarrow \Sigma$   $\delta \rightarrow \Sigma$   $\epsilon \rightarrow \Sigma$

### Θέμα 2<sup>ο</sup>

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\beta. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}.$$

$$\text{Επομένως: } e^x f'(x) = e^x \frac{2-x}{e^x} = 2-x.$$

γ. Η  $f$  είναι γν. αύξουσα στο  $(-\infty, 2]$  και γν. φθίνουσα στο  $[2, +\infty)$ , επομένως παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο

$$x_0 = 2, \text{ με } f(2) = \frac{1}{e}.$$

	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'$	+	0	-
$f$	τ.μ.		

### Θέμα 3<sup>ο</sup>

$$\alpha. \bar{x}_A = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = 22 \text{ χιλ. ώρες}$$

$$\bar{x}_B = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = 24 \text{ χιλ. ώρες.}$$

β. Το μέσο κόστος ανά χιλιάδα ωρών και ανά τύπο μπαταρίας είναι:

$$\text{για τον τύπο A: } \frac{38}{22} \approx 1,73 \text{ €/χιλ. ώρες}$$

$$\text{για τον τύπο B: } \frac{40}{24} \approx 1,66 \text{ €/χιλ. ώρες}$$

Άρα συμφέρει ο τύπος B.

$$\gamma. S_A^2 = \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5} = 8(\text{χιλ. ώρες})^2$$

$$\text{Επομένως } S_A = 2\sqrt{2}(\text{χιλ. ώρες})$$

$$S_B^2 = \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} = 22(\text{χιλ. ώρες})^2$$

$$\text{Επομένως } S_B = \sqrt{22}(\text{χιλ. ώρες})$$

$$\delta. CV_A = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11}, \quad CV_B = \frac{\sqrt{22}}{24}, \quad \text{\acute{a}\rho\alpha} \quad \frac{CV_A}{CV_B} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{11}}{\frac{\sqrt{22}}{24}} = \frac{24}{11\sqrt{11}} \approx \frac{24}{11 \cdot 3,3} < 1$$

Επομένως  $CV_A < CV_B$ , δηλαδή μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει το δείγμα A.

#### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Έστω τα ενδεχόμενα:

A: «διαβάζουν εφημερίδα α» και B: «διαβάζουν εφημερίδα β»

Τότε  $P(A) = 0,5$  και  $P(A - B) = 0,3$  και

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$$

α. Το ενδεχόμενο «δεν διαβάζει α ή διαβάζει β», είναι το  $A' \cup B$

\acute{a}\rho\alpha

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) + P(A \cap B) = 1 - 0,5 + 0,2 = 0,7$$

β.  $B \subset A' \cup B$ , \acute{a}\rho\alpha  $P(B) \leq P(A' \cup B) \Leftrightarrow P(B) \leq \frac{7}{10}$ .

$$A \cap B \subset B \text{ \acute{a}\rho\alpha } P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow P(B) \geq 0,2 \Leftrightarrow P(B) \geq \frac{1}{5}$$

$$\text{\acute{A}\rho\alpha} \quad \frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$$

γ.  $f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$

$$\Delta = 1 - 12P(B), \text{ \acute{a}\lambda\lambda\acute{\alpha} } P(B) \geq \frac{1}{5} > \frac{1}{12}, \text{ \delta\eta\lambda. } P(B) > \frac{1}{12} \Leftrightarrow 1 - 12P(B) < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0,$$

οπότε  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  \acute{a}\rho\alpha η f είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  \acute{a}\rho\alpha δεν έχει ακρότατα.