ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2005

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta .$$

Μονάδες 9

Α.2 Πότε η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞;

Μονάδες 4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) + g(x)\right)$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{1}.

Μονάδες 2

δ. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) - f(a)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.
Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M.

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\,\lambda}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{\text{ημ}\, x}$.

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt$ και $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt = \dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0\ ,\ 1)$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α.1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- f(α) ≠ f(β)

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in$ (α, β) τέτοιος ώστε $f(x_0) = η$

Α.2. Η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$.

Β.
α → Λ,
β → Λ
γ → Σ
δ → Σ
ε → Λ
στ → Σ

ΘΕΜΑ 2

α. Από τη σχέση $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$ έχουμε:

$$|z_1|=3 \Leftrightarrow |z_1|^2=9 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=9 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{9}{z_1}.$$

β. Αρκεί (*) να δειχθεί ότι:

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

Όμως $\bar{z}_1=\frac{9}{z_1}$, $\bar{z}_2=\frac{9}{z_2}$, $\bar{z}_3=\frac{9}{z_3}$ αφού $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

Άρα $$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}}=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}.$$

* Ισχύει ότι $z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in$ IR
γιατί αν z = α + βi τότε $\bar{z}=\alpha-\beta i$ άρα $z-\bar{z}=2\beta i$ (1).

Έτσι $z=\bar{z} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta=0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{IR}$

γ. α' τρόπος

Είναι:

$$|z_1+z_2+z_3|=\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=9\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=9\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right|=$$

$$=9\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1||z_2||z_3|}=9\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{27}=\frac{1}{3}|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|.$$

β' τρόπος

Είναι:

$$|z_1+z_2+z_3|^2=\frac{1}{9}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1+z_2+z_3)\overline{(z_1+z_2+z_3)}=\frac{1}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\overline{(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)}$$

$$(z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})=\frac{1}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)(\overline{z_1z_2}+\overline{z_2z_3}+\overline{z_3z_1})$$

$$(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right)=\frac{1}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\left(\frac{81}{z_1z_2}+\frac{81}{z_2z_3}+\frac{81}{z_3z_1}\right)$$

$$9(z_1+z_2+z_3)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=\frac{81}{9}(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\left(\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}\right)$$

$$\left(1+\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+1+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+1\right)=\left(1+\frac{z_1z_2}{z_2z_3}+\frac{z_1z_2}{z_3z_1}+\frac{z_2z_3}{z_1z_2}+1+\frac{z_2z_3}{z_3z_1}+\frac{z_3z_1}{z_1z_2}+\frac{z_3z_1}{z_2z_3}+1\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}=\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}+\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_2}.$$

Η τελευταία ισχύει προφανώς, άρα και η αρχική.

ΘΕΜΑ 3

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων σ' αυτό, με $f'(x)=(e^{\lambda x})'=e^{\lambda x}\cdot(\lambda x)'=\lambda e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Είναι $\lambda>0$, $e^{\lambda x}>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έστω $(x_0,\ f(x_0))$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι
(ε): $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0)$.
Για να διέρχεται η (ε) από την αρχή των αξόνων πρέπει και αρκεί:

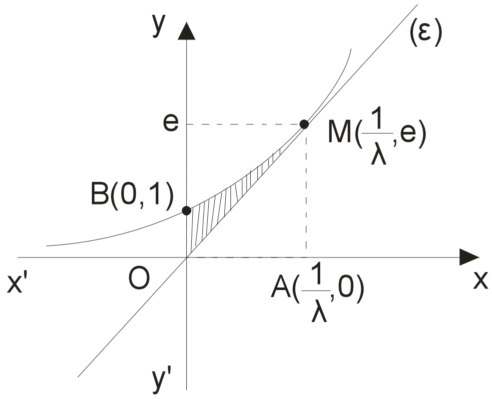
$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow -1 = \lambda(-x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

Έτσι η (ε) γίνεται:

$$y - e = \lambda e\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = \lambda e x.$$

Οι συντεταγμένες του Μ είναι: $M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$.

γ.



Το ζητούμενο εμβαδόν όπως φαίνεται από το σχήμα ισούται με:

$$(OAMB) - (OAM) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\lambda x}dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e = \left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}\cdot e - \frac{1}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} = \frac{2e-2-e}{2\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

δ. Είναι $\dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = \dfrac{\lambda^2\cdot\dfrac{e-2}{2\lambda}}{2+\eta\mu\lambda} = \dfrac{(e-2)\lambda}{2(2+\eta\mu\lambda)} = \dfrac{e-2}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}}$.

Για κάθε $\lambda > 0$ είναι:

$$-1 \le \eta\mu\lambda \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2+\eta\mu\lambda \le 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\lambda} \le \frac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} \le \frac{3}{\lambda}.$$

Όμως $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\lambda}\right) = 0$, οπότε με βάση το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$, ενώ $\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$.

Έτσι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{2+\eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$ και αφού $\dfrac{e-2}{2} > 0$ προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda} = +\infty.$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου Ε (λ) είναι δυνατόν να μη χρησιμοποιηθεί το σχήμα ως εξής:

Για την $f(x) = e^{\lambda x}$ είναι $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ και $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο της, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής. (Σχόλιο σελ. 274 σχολικού βιβλίου).
Έτσι $f(x) \geq \lambda ex \Leftrightarrow f(x) - \lambda ex \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση
$g(x) = f(x) - \lambda ex$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0, \frac{1}{\lambda}\right]$
οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda ex)dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda ex)dx = \left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} - \frac{\lambda ex^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \ldots = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

ΘΕΜΑ 4

α. Από τη δοσμένη σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \quad \text{ή}$$

$$2f'(x)e^{f(x)} = e^x \quad \text{ή}$$

$$f'(x)e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}e^x \quad \text{ή}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 0$ έχουμε: $e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + C$
η οποία λόγω του ότι $f(0) = 0$ γράφεται:

$$e^0 = \frac{e^0}{2} + C \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Οπότε: $e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2}$.

Άρα: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

β. Θέτουμε $x - t = u$.
Διαφορίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε $du = -dt$.
Επιπλέον για $t = 0$ είναι $u = x$, ενώ για $t = x$ είναι $u = 0$.
Έτσι:

$$\int_0^x f(x-t)dt = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(\int_0^x f(u)du\right)'=f(x)$.

Επειδή η $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής σ' αυτό.

Επομένως: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)du\right)'}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=f(0)=0$.

(Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και συνεχής σ' αυτό.)

γ. Είναι

$$h(x)=\int_{-x}^{x}t^{2005}f(t)dt=\int_{-x}^{0}t^{2005}f(t)dt+\int_0^x t^{2005}f(t)dt=\int_0^x t^{2005}f(t)dt-\int_0^{-x}t^{2005}f(t)dt.$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(t)=t^{2005}\cdot f(t)$ η $h(x)$ γράφεται:

$$h(x)=\int_0^x\varphi(t)dt-\int_0^{-x}\varphi(t)dt.$$

Η $\varphi(t)=t^{2005}\cdot f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $\kappa(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\kappa'(x)=\varphi(x)=x^{2005}\cdot f(x)$, όπως επίσης είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση $\kappa(-x)=\int_0^{-x}\varphi(t)dt$ ως σύνθεση των παραγωγισίμων $-x$, $\kappa(x)$, με $(\kappa(-x))'=\varphi(-x)(-x)'=-\varphi(-x)$.

Επομένως

$h'(x)=(\kappa(x)-\kappa(-x))'=\varphi(x)+\varphi(-x)=x^{2005}f(x)+(-x)^{2005}f(-x)=$

$$=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)-x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{1+e^{-x}}{2}}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right)=$$

$$=x^{2005}\cdot\ln\left(\frac{1+e^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right)=x^{2005}\cdot\ln\left[\frac{e^x(1+e^x)}{(e^x+1)}\right]=x^{2005}\cdot\ln e^x=x^{2005}\cdot x=x^{2006}.$$

Ακόμα η $g(x)=\frac{x^{2007}}{2007}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=2007\cdot\frac{x^{2006}}{2007}=x^{2006}$.

Επειδή $h'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)=g(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Όμως για $x=0$ είναι $h(0)=g(0)=0$, άρα $c=0$.

Επομένως $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ. Η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \dfrac{1}{2008}$ λόγω του ερωτήματος γ γράφεται ισοδύναμα

$\dfrac{x^{2007}}{2007} = \dfrac{1}{2008} \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$P(x) = 2008x^{2007} - 2007$, $x \in [0, 1]$.

Η P είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.

$P(0) = -2007 < 0$ κ' $P(1) = 1 > 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$.

Επιπλέον η $P(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα και στο $[0, 1]$ με $P'(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}$.

Είναι $P'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$.

Άρα η $P(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.