ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2005

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να θεωρηθούν ισοπίθανα.

Μονάδες 10

Β.

α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές;

Μονάδες 3

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 2

β. Ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 2

γ. Η διακύμανση είναι μέτρο θέσης.

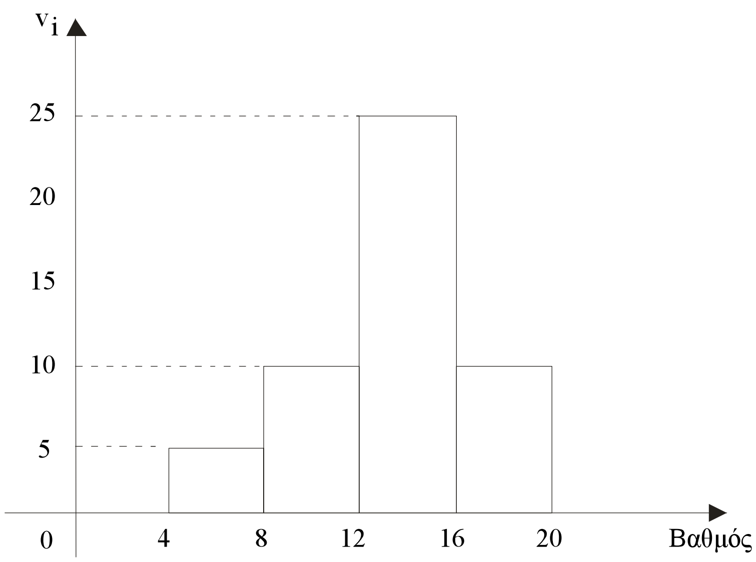
Μονάδες 2

δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων **ν_i :**



α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις βαθ/γίας [ )	**Κέντρο κλάσης x_i**	**Συχνότητα ν_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**	**Αθρ. σχετ. συχνότητα F_i**
[4, 8)					
[8,12)					
[12,16)					
[16,20)					
Σύνολο					

Μονάδες 11

β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών.

Μονάδες 8

γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό το πολύ μέχρι και 10;

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι 7/8

(ii) Οι πιθανότητες P(B) , P(A∩B) δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{ k, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$, όπου:

$$k = \lim_{x \to 5} \frac{3x - 15}{x^2 - 6x + 5}$$

α. Να βρεθεί το k

Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα P(B), P(A∩B) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α

Μονάδες 6

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Λ(1,1).

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx' και yy', οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (**α**) έχουν μέση τιμή $\overline{x} = 5$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$. Να βρεθεί η μέση τιμή $\overline{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α.
3ος κανόνας λογισμού των πιθανοτήτων:
Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Για δύο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε
$N(A \cup B) + N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, (1)
αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.
Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

Β.
α. Ποσοτικές λέγονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί.
β. Διακριτή ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία παίρνει μόνο μεμονωμένες τιμές.
Συνεχής ονομάζεται η ποσοτική μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα διάστημα πραγματικών αριθμών (α, β).

Γ.
$\alpha \to \Sigma$
$\beta \to \Lambda$
$\gamma \to \Lambda$
$\delta \to \Lambda$

ΘΕΜΑ 2

α.

Κλάσεις βαθ/γίας [ )	**Κέντρο κλάσης x_i**	**Συχνότητα v_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**	**Αθρ.σχετ. συχνότητα F_i**
[4, 8)	6	5	0,1	5	0,1
[8, 12)	10	10	0,2	15	0,3
[12, 16)	14	25	0,5	40	0,8
[16, 20)	18	10	0,2	50	1
Σύνολο		50	1		

β. $\overline{x} = \dfrac{5 \cdot 6 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 14 + 10 \cdot 18}{50} = \dfrac{660}{50} = 13{,}2.$

γ. Βαθμό το πολύ μέχρι και 10 έχουν 5 + 5 = 10 μαθητές.

ΘΕΜΑ 3

α. Είναι $\kappa = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{x^2-6x+5} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3}{5-1} = \dfrac{3}{4}$.

β. Αφού $\kappa = \dfrac{3}{4}$, το σύνολο $X = \left\{\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right\}$.

Επειδή $\dfrac{5}{4} > 1$, η τιμή $\dfrac{5}{4}$ αποκλείεται να ισούται με κάποια από τις τιμές $P(A\cap B)$, $P(B)$. Έτσι $\{P(A\cap B), P(B)\} = \left\{\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Ισχύει $A\cap B \subseteq B$ άρα $P(A\cap B) \le P(B)$ και επειδή $P(A\cap B) \ne P(B)$ είναι $P(A\cap B) < P(B)$.

Άρα $P(A\cap B) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{3}{4}$.

γ.

(1) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Άρα $\dfrac{7}{8} = P(A) + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}$, οπότε $P(A) = \dfrac{5}{8}$.

(2) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A είναι:

$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = \dfrac{5}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

ΘΕΜΑ 4

α.

1ος τρόπος λύσης:

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο Λ(1, 1) έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = f'(1) = -1.$$

Επομένως η εξίσωσή της είναι

$$y = -x + \beta.$$

Επειδή όμως το σημείο Λ(1, 1) ανήκει στην εφαπτομένη, είναι

$$1 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -x + 2$.

2ος τρόπος λύσης:

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Λ (1, 1) είναι :

$$y - f(1) = f'(1)\,(x - 1).$$

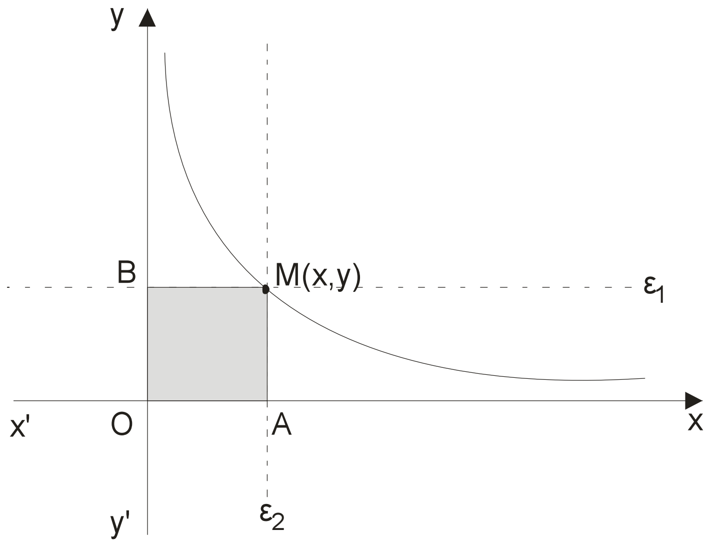
Όμως

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

Επομένως

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1 + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

β.



Έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και ε_1, ε_2 οι ευθείες που διέρχονται από το Μ και είναι παράλληλες αντίστοιχα προς τους άξονες x΄x και y΄y.

Η περίμετρος του σχηματιζόμενου ορθογωνίου παραλληλογράμου ΟΑΜΒ είναι

$$\Pi = 2x + 2y = 2(x + y) \qquad (1)$$

Λόγω της σχέσης $y=\dfrac{1}{x}$, η (1) γράφεται :

$$\Pi = 2\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \text{με} \quad x \in (0, +\infty).$$

Η Π(x) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

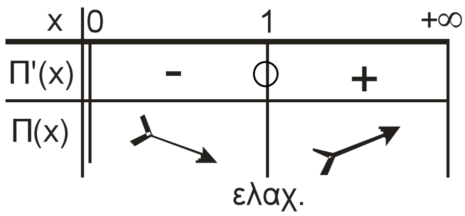
$$\Pi'(x) = 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 2\,\frac{x^2-1}{x^2} = 2\,\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Από την εξίσωση Π΄(x) = 0 έχουμε:

$$2\,\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = +1 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

Η τιμή x = -1 απορρίπτεται γιατί $x \in (0, +\infty)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:



$$\Pi(1) = 4$$

Οπότε για την τιμή x = 1, η Π(x) παρουσιάζει ελάχιστο. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το Μ(1, 1).

γ. Είναι :

$$\overline{y} = -\overline{x} + 2 = -3 \quad \text{και}$$

$$S_y = |-1| S_x = 2 \,.$$