

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2004**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ , τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και έχουν συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1.$$

**Μονάδες 10**

- B.** Έστω δύο σημεία  $E$  και  $E'$  ενός επιπέδου. Τι ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία  $E$  και  $E'$  στο συγκεκριμένο επίπεδο;

**Μονάδες 5**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ , η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει ευθεία.

**Μονάδες 2**

- β.** Στην παραβολή  $y^2 = 2px$ , η εξίσωση της διευθετούσας είναι  $x = \frac{p}{2}$ .

**Μονάδες 2**

- γ.** Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί  $a, \beta, \gamma, k, \lambda$  με  $a \neq 0$ . Αν  $a|\beta$  και  $a|\gamma$ , τότε  $a|(k\beta + \lambda\gamma)$ .

**Μονάδες 2**

- δ.** Αν  $A, B, \Gamma$  είναι κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε το εμβαδόν του είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}) \right|$$

**Μονάδες 2**

- ε.** Η εκκεντρότητα  $\epsilon$  της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (2, 3)$ .

- A.** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ .

**Μονάδες 8**

- B.** Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το  $\vec{\gamma}$  με τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 8**

- Γ.** Να βρείτε τον αριθμό  $k \in \mathbb{R}$ , ώστε το διάνυσμα  $\vec{v} = (k^2 - k, k)$  να είναι κάθετο στο  $\vec{\alpha}$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο ακέραιος αριθμός  $a=12k-5$ , όπου  $k \in \mathbb{Z}$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι ο  $a$  είναι περιττός αριθμός.

**Μονάδες 7**

**B.** Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $a$  διά του 4.

**Μονάδες 8**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $A = (a^2+15)(a^2-1)$  είναι πολλαπλάσιο του 64.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1: 3x+4y+6=0$  και  $\varepsilon_2: 3x+4y+16=0$ .

**A.** Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

**Μονάδες 7**

**B.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

**Μονάδες 8**

**Γ.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_1$  με τον άξονα  $x'x$  και αποκόπτει από την ευθεία  $\varepsilon_2$  χορδή μήκους  $d = 4\sqrt{3}$ .

**Μονάδες 10**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω τα διανύσματα  $\vec{a}(x_1, \psi_1)$  και  $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$ , τα οποία δεν είναι παράλληλα με τον άξονα  $y'y$ , οπότε  $x_1 x_2 \neq 0$ .

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{\beta} &\Leftrightarrow \vec{a}\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + \psi_1 \psi_2 = 0 \Leftrightarrow \psi_1 \psi_2 = -x_1 x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\psi_1 \psi_2}{x_1 x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1.\end{aligned}$$

- B.** Ονομάζεται υπερβολή με εστίες τα σημεία  $E'$  και  $E$  ο γεωμετρικός τόπος  $C$  των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα σημεία  $E'$  και  $E$  είναι σταθερή και μικρότερη του ( $E'E$ ).

**Γ.**

α	β	γ	δ	ε
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ

### ΘΕΜΑ 2ο

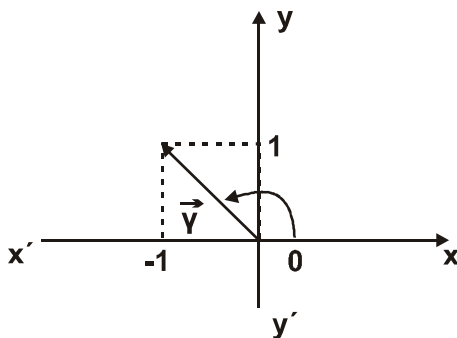
- A.** Είναι:

$$5\vec{a} = 5(1, 2) = (5, 10), \quad 3\vec{\beta} = 3(2, 3) = (6, 9).$$

$$\text{Άρα } \vec{\gamma} = 5\vec{a} - 3\vec{\beta} = (5, 10) - (6, 9) = (-1, 1).$$

$$\text{Οπότε } |\vec{\gamma}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

**B.**



Αν  $\varphi$  είναι η γωνία που σχηματίζει το  $\vec{\gamma}$  με τον  $x'x$ , τότε  $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{-1} = -1$  και

επειδή  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , είναι  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$  ή  $\frac{7\pi}{4}$ .

Επειδή όμως το  $\vec{\gamma}$  βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο, προκύπτει  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ .

- Γ. Επειδή  $\vec{\alpha} \perp \vec{\nu}$  προκύπτει  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = 0$ . Επομένως  
 $(\kappa^2 - \kappa) \cdot 1 + \kappa \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$  ή  $\kappa = -1$ .

### ΘΕΜΑ 3ο

- Α. Έχουμε  
 $a = 12\kappa - 5 = 12\kappa - 6 + 1 = 2(6\kappa - 3) + 1$   
 $= 2\rho + 1$  (με  $\rho = 6\kappa - 3 \in \mathbb{Z}$ , αφού  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ). Άρα ο  $a$  είναι περιττός αριθμός.
- Β.  $a = 12\kappa - 5 = 12\kappa + 8 - 8 - 5 = 12\kappa - 8 + 3 = 4(3\kappa - 2) + 3 =$   
 $4\lambda + 3$  (με  $\lambda = 3\kappa - 2 \in \mathbb{Z}$ , αφού  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ).  
 Αφού  $0 < 3 < 4$  το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $a$  διά του 4 είναι  $u=3$ .
- Γ.  $A = (a^2 + 15) \cdot (a^2 - 1)$   
 Αφού  $a$  περιττός, είναι  $a^2 = 8\lambda + 1$ , με  $\lambda \in \mathbb{Z}$  (από εφαρμογή 2ii σελίδα 143 σχολ. βιβλίου). Άρα  
 $a^2 + 15 = 8\lambda + 16 = 8(\lambda + 2)$  και  $a^2 - 1 = 8\lambda$ .  
 Επομένως  $A = (a^2 + 15) \cdot (a^2 - 1) = 8(\lambda + 2) \cdot 8\lambda = 64 \cdot \lambda(\lambda + 2) = \text{πολ64}$ .

### ΘΕΜΑ 4ο

- Α. Για  $y=0$  στην  $\varepsilon_1$  βρίσκουμε  $x=-2$ . Άρα το σημείο  $K(-2,0)$  είναι σημείο της  $\varepsilon_1$ .  
 Η απόσταση τώρα των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι ίση με την απόσταση του σημείου  $K$  από την  $\varepsilon_2$ .  
 Δηλαδή:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(K, \varepsilon_2) = \frac{|3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

- Β. Για  $x=0$  στην  $\varepsilon_2$  βρίσκουμε  $y = -4$ . Άρα το σημείο  $\Lambda(0, -4)$  είναι σημείο της  $\varepsilon_2$ . Βρίσκουμε τώρα τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του ευθ. τμήματος  $K\Lambda$ :

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_K + x_\Lambda}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1 \\ y_M &= \frac{y_K + y_\Lambda}{2} = \frac{0 + (-4)}{2} = -2 \end{aligned} \right\} M(-1, -2)$$

Η μεσοπαράλληλη ( $\varepsilon$ ) των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ως παράλληλή τους, έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης μ' αυτές.

Έτσι  $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{4}$  και επειδή διέρχεται από το  $M$  θα έχει εξίσωση:

$$y - y_M = -\frac{3}{4}(x - x_M) \Leftrightarrow y + 2 = -\frac{3}{4}(x + 1) \Leftrightarrow 4y + 8 = -3x - 3 \Leftrightarrow 3x + 4y + 11 = 0$$

- Γ. Έστω  $AB$  η χορδή που αποκόπτει ο ζητούμενος κύκλος από την  $\varepsilon_2$  και  $\Gamma$  το μέσον της. Τότε το τμήμα  $K\Gamma$  είναι το απόστημα της χορδής και το μήκος του  $K\Gamma$  ισούται με την απόσταση των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ . Επίσης είναι  $AK=BK=R$ , όπου  $R$  η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου.

