

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗΣ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

**B.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός και  $\bar{z}$  ο συζυγής του, τότε ισχύει  $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ .

Μονάδες 2

**β.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

Μονάδες 2

**γ.** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

**δ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

**ε.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0)=0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

Μονάδες 2

## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = a + \beta i$ , όπου  $a, \beta \in \mathbb{R}$  και  $w = 3z - i\bar{z} + 4$  όπου  $\bar{z}$  είναι ο συζυγής του  $z$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(w) = 3a - \beta + 4$$

$$\operatorname{Im}(w) = 3\beta - a.$$

Μονάδες 6

**β.** Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 12$ , τότε οι εικόνες του  $z$  κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ .

Μονάδες 9

**γ.** Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ , έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

## ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

**α.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

**β.** Να αποδείξετε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 6

**γ.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0,0)$  είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της  $f$  και της  $f^{-1}$ .

Μονάδες 5

**δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ , τον άξονα των  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x = 3$ .

Μονάδες 8

## ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$  που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο  $(a, \beta)$ . Αν ισχύει

$f(a) = f(\beta) = 0$  και υπάρχουν αριθμοί  $\gamma \in (a, \beta)$ ,  $\delta \in (a, \beta)$ , έτσι ώστε  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ , να αποδείξετε ότι:

**α.** Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο διάστημα  $(a, \beta)$ .

Μονάδες 8

**β.** Υπάρχουν σημεία  $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$  τέτοια ώστε  $f''(\xi_1) < 0$  και  $f''(\xi_2) > 0$ .

Μονάδες 9

**γ.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

Μονάδες 8

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

- α. Θεωρία: Θεώρημα σελ. 217 σχολικού βιβλίου  
β. Θεωρία: Η απάντηση βρίσκεται στη σελ. 247 του σχολικού βιβλίου  
γ.

α-Σ

β-Σ

γ-Σ

δ-Λ

ε-Λ

### ΘΕΜΑ 2ο

- α. Είναι:

$$w = 3z - \bar{iz} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$$

Έτσι  $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$  και  $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$ .

- β. Οι εικόνες του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα σημεία  $M(3\alpha - \beta + 4, 3\beta - \alpha)$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Αφού ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση  $y = x - 12$  είναι:

$$3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow 4\beta - 4\alpha = -8 \Leftrightarrow \beta - \alpha = -2 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2.$$

Από την τελευταία συνάγεται ότι τα σημεία  $N(\alpha, \beta)$  που είναι οι εικόνες του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$ .

- γ. Από τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών, των οποίων οι εικόνες κινούνται στην ευθεία  $(\epsilon): y = x - 2$ , ελάχιστο μέτρο έχει εκείνος του οποίου η εικόνα  $K$  είναι τέτοια ώστε  $OK$  κάθετη στην  $(\epsilon)$ . Έτσι:

$$\lambda_{OK} = -1 \text{ και } OK: y = -x$$

Λύνοντας το σύστημα:

$$y = x - 2, y = -x$$

προκύπτει  $x = 1, y = -1$ . Δηλαδή το σημείο  $K$  έχει συντεταγμένες  $(1, -1)$ . Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο από αυτούς που κινούνται στην ευθεία με εξίσωση  $y = x - 2$  είναι ο  $z = 1 - i$ .

### ΘΕΜΑ 3ο

α. Η συνάρτηση  $f(x)=x^5+x^3+x$  είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη 2 φορές σε όλο το  $\mathbb{R}$  με:

$$f'(x) = (x^5+x^3+x)' = 5x^4+3x^2+1 \text{ και}$$

$$f''(x) = (5x^4+3x^2+1)' = 20x^3+6x$$

- Επειδή είναι  $f'(x) = 5x^4+3x^2+1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , προκύπτει ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$ .
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 20x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(10x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$  εφόσον  $10x^2+3>0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	0	+
f	∩		∪

Επομένως η  $f$  είναι:

- κοίλη στο διάστημα  $(-\infty, 0]$  και
- κυρτή στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .
- Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  θα είναι 1-1 σε αυτό και συνεπώς η  $f$  είναι αντιστρέψιμη στο  $\mathbb{R}$ .

β. Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  (ερώτημα α). Προκειμένου να δείξουμε ότι  $f(e^x) \geq f(1+x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αρκεί να δείξουμε ότι:

$$e^x \geq 1+x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x)=e^x-1-x$  στο  $\mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με  $g'(x)=e^x-1$ . Από την εξίσωση  $g'(x)=0$  έχουμε  $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ .

Έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	γν. φθίνουσα		γν. αύξουσα

$$\text{ελάχ. } g(0) = 0$$

Επομένως  $g(x) \geq g(0)=0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ή  $e^x-1-x \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και άρα:

$$e^x \geq 1+x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ. Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $(0,0)$  έχει εξίσωση

$$y-f(0) = f'(0)(x-0) \text{ ή } y-0 = 1(x-0) \text{ ή } \boxed{y=x}$$

που είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων. Επειδή τώρα η  $f$  είναι αντιστρέψιμη (ερώτημα α) προκύπτει ότι υπάρχει η  $f^{-1}$  ή οποία (λόγω πρότασης σελ. 155 σχολ. βιβλ.) έχει  $C_{f^{-1}}$  συμμετρική την  $C_f$  ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία  $y=x$

δ. Για κάθε  $x \in [0,3]$  είναι:  $x \geq 0$  και επειδή η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (\*), θα είναι  $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(0) \Leftrightarrow f^{-1}(x) \geq 0$ . (αφού  $f^{-1}(0) = 0$  \*\*)

Έτσι το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου ισούται με:  $E = \int_0^3 f^{-1}(y)dy$ .

$$\text{Θέτουμε } f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x). \quad (1)$$

Διαφορίζοντας την (1) λαμβάνουμε:  $dy=d[f(x)]=f'(x)dx$  και

$$y|_0^3 \rightarrow x|_{f(x)=0}^{f(x)=3} \rightarrow x|_{x^5+x^3+x=0}^{x^5+x^3+x=3} \rightarrow x|_0^1 \quad (***) , \text{ \u03b1\u03c1\u03b1}$$

$$E = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x(x^5 + x^3 + x)' dx = \int_0^1 (5x^5 + 3x^3 + x) dx = 5 \int_0^1 x^5 dx + 3 \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x dx =$$

$$= 5 \left[ \frac{x^6}{6} \right]_0^1 + 3 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 5 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ \u03c4.}\mu.$$

### Αιτιολογήσεις για το ερώτημα \u03b4 του 3\u2070 \u03b8\u03b5\u03bc\u03b1\u03c4\u03bf\u03c2:

(\*) Η  $f^{-1}$  είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο  $\mathfrak{R}$ , σύμφωνα με την πρόταση που λέει ότι αν η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διάστημα  $\Delta$  τότε υπάρχει η αντίστροφή της η οποία είναι επίσης συνεχής στο  $f(\Delta)$  και διατηρεί το ίδιο είδος μονοτονίας με την  $f$ . (Η πρόταση αυτή, όμως, δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και αναφέρεται για λόγους μαθηματικής πληρότητας. Έτσι, η μη αναφορά σε αυτήν από κάποιο μαθητή δεν έχει βαθμολογικές απώλειες).

(\*\*) Ισχύει ότι:  $f^{-1}(0)=0$ . Πράγματι για  $x=0$  έχουμε:  $f^{-1}(0)=y \Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(y) \Leftrightarrow 0=f(y) \Leftrightarrow 0=y^5+y^3+y \Leftrightarrow y(y^4+y^2+1)=0 \Leftrightarrow y=0$ .

(\*\*\*)

- Η εξίσωση  $x^5+x^3+x=3$  έχει μοναδική λύση την  $x=1$  γιατί η  $f(x)$  είναι 1-1 στο  $\mathfrak{R}$  και επομένως κάθε οριζόντια ευθεία, οπότε και η  $y=3$ , τέμνει την  $C_f$  σε μοναδικό σημείο.
- Η εξίσωση  $x^5+x^3+x=0$  έχει μοναδική λύση την  $x=0$ , γιατί  $x(x^4+x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ , αφού  $x^4+x^2+1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathfrak{R}$ .

### **\u0398\u0395\u039c\u0391 4\u03bf**

\u03b1. Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα  $\gamma, \delta$  και  $f(\gamma)f(\delta) < 0$ , εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano από το οποίο συνάγεται ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα  $x_0$  που ανήκει στο ανοιχτό διάστημα με άκρα  $\gamma, \delta$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

\u03b2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $\gamma < \delta$  και  $f(\gamma) > 0, f(\delta) < 0$ , οπότε  $a < \gamma < x_0 < \delta < \beta$ .

i) Στο διάστημα  $[a, \gamma]$  είναι:

$$f(a) = 0, f(\gamma) > 0, \text{ \u03b1\u03c1\u03b1 } f(a) < f(\gamma) \text{ και επειδή}$$

είναι  $a < \gamma$  συνάγεται ότι:

$$\frac{f(a) - f(\gamma)}{a - \gamma} > 0 \quad (1)$$

\u038c\u03bc\u03c9\u03c2 από το θεώρημα μέσης τιμής (\u0398\u039c\u03a4) για την  $f$  στο διάστημα  $[a, \gamma]$ , υπάρχει  $\kappa_1 \in (a, \gamma)$

\u03c9\u03c3\u03c4\u03b5  $f'(\kappa_1) = \frac{f(a) - f(\gamma)}{a - \gamma}$  και λόγω της (1)  $f'(\kappa_1) > 0$ .

ii) Εργαζόμενοι ομοίως, στο διάστημα  $[\gamma, x_0]$  έχουμε:

$f(\gamma) > 0, f(x_0) = 0$  \u03b1\u03c1\u03b1  $f(\gamma) > f(x_0)$  και επειδή είναι  $\gamma < x_0$  συνάγεται:

$$\frac{f(\gamma) - f(x_0)}{\gamma - x_0} < 0 \quad (2)$$

Από το ΘΜΤ για την  $f$  στο διάστημα  $[\gamma, x_0]$  έχουμε ότι υπάρχει  $\kappa_2 \in (\gamma, x_0)$  ώστε

$$f'(\kappa_2) = \frac{f(\gamma) - f(x_0)}{\gamma - x_0}$$

και λόγω της (2) είναι  $f'(\kappa_2) < 0$ .

iii) Για το διάστημα  $[x_0, \delta]$  όμοια έχουμε ότι υπάρχει  $\kappa_3 \in (x_0, \delta)$  ώστε

$$\frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} = f'(\kappa_3) < 0$$

iv) Για το διάστημα  $[\delta, \beta]$  όμοια έχουμε ότι υπάρχει  $\kappa_4 \in (\delta, \beta)$  ώστε

$$\frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = f'(\kappa_4) > 0$$

v) Είναι  $f'(\kappa_1) > 0$ ,  $f'(\kappa_2) < 0$  άρα  $f'(\kappa_1) > f'(\kappa_2)$  και επειδή  $\kappa_1 < \kappa_2$ , είναι:

$$\frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

Όμως για την  $f'$  εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα  $[\kappa_1, \kappa_2]$ , οπότε υπάρχει  $\xi_1 \in (\kappa_1, \kappa_2)$  ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\kappa_1) - f'(\kappa_2)}{\kappa_1 - \kappa_2} < 0$$

vi) Είναι  $f'(\kappa_3) < 0$ ,  $f'(\kappa_4) > 0$ , άρα  $f'(\kappa_3) < f'(\kappa_4)$  και επειδή  $\kappa_3 < \kappa_4$  είναι

$$\frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Όμως για την  $f'$  εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο διάστημα  $[\kappa_3, \kappa_4]$ , οπότε υπάρχει  $\xi_2 \in (\kappa_3, \kappa_4)$  ώστε

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\kappa_3) - f'(\kappa_4)}{\kappa_3 - \kappa_4} > 0$$

Δείξαμε έτσι ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$  ώστε  $f''(\xi_1) < 0$  και  $f''(\xi_2) > 0$ .

- γ. Από το β ερώτημα με βάση το θεώρημα Bolzano για την  $f''$  στο κλειστό διάστημα με άκρα  $\xi_1, \xi_2$  προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο  $\xi_0$  που ανήκει στο ανοικτό διάστημα με άκρα  $\xi_1, \xi_2$  ώστε  $f''(\xi_0) = 0$ .

Το σημείο  $\xi_0$  θα ήταν σημείο καμψής της συνάρτησης εφόσον η  $f''$  άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Όμως κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα του θέματος.

### **β' τρόπος λύσης για το θέμα 4β:**

Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής για την  $f$  που είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  εξασφαλίζεται ότι υπάρχουν δύο σημεία  $x_1, x_2 \in [a, \beta]$  με  $x_1 < x_2$  ώστε  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

Εφόσον η  $f$  παίρνει μία τουλάχιστον αρνητική τιμή και μία τουλάχιστον θετική (πράγμα που συνεπάγεται από την δοσμένη σχέση  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ ), η ελάχιστη τιμή  $f(x_1)$  θα είναι αρνητική, ενώ η μέγιστη τιμή  $f(x_2)$  θα είναι θετική.

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, \beta)$  άρα και στα εσωτερικά σημεία  $x_1, x_2$ , που επειδή είναι θέσεις ακρότατων από το  $\theta$ . Fermat συνάγεται ότι  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ .

Στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f'$  δεν μπορεί να είναι η σταθερή μηδενική διότι τότε η  $f$  θα ήταν σταθερή και άρα  $f(x_1) = f(x_2)$  ή  $f_{\max} = f_{\min}$  - άτοπο διότι υπάρχουν τα δοσμένα  $\gamma, \delta$  για τα οποία ισχύει από υπόθεση  $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$ .

Συνεπώς υπάρχει σημείο  $x_3 \in (x_1, x_2)$  ώστε  $f'(x_3) > 0$  ή  $f'(x_3) < 0$ . Έστω πχ  $f'(x_3) > 0$ .

Τότε

- από ΘΜΤ για την  $f'$  στο  $[x_1, x_3]$ , υπάρχει  $\xi_1 \in (x_1, x_3)$  ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_3) - f'(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f'(x_3)}{x_3 - x_1} > 0$$

- από ΘΜΤ για την  $f'$  στο  $[x_3, x_2]$ , υπάρχει  $\xi_2 \in (x_3, x_2)$  ώστε:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_2) - f'(x_3)}{x_2 - x_3} = \frac{-f'(x_3)}{x_2 - x_3} < 0$$

Αν υποθέταμε  $f(x_3) < 0$  θα προέκυπτε  $f''(\xi_1) < 0$ ,  $f''(\xi_2) > 0$ .