ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ένας κύκλος (O,R).

α. Στον κύκλο (O,R) να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 το απόστημα του τετραγώνου.

Μονάδες 4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό"** αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος"** αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 2

γ. Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) ορίζεται με τον τύπο: $\Delta^{P}_{(O,R)} = R^2 + OP^2$.

Μονάδες 2

δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

Γ. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1 και ΒΓ= $B\Gamma = \sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε:

α. τη γωνία $\hat{A}$

Μονάδες 9

β. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 9

γ. τη διάμεσο ΒΜ = μ_β.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ τέτοιες, ώστε να ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε,

α. να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς α.

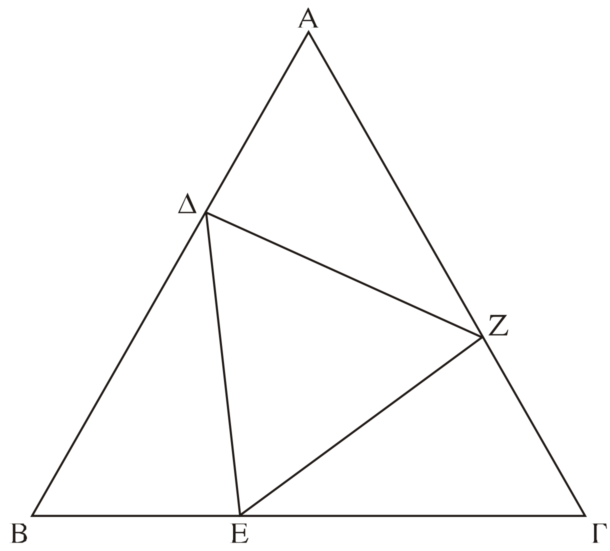
Μονάδες 12

β. να αποδείξετε ότι $\mathrm{AM} \cdot \mathrm{AE} = \dfrac{3\alpha^2}{2}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς α. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = $\dfrac{1}{3}\alpha$, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α:

α. του τριγώνου ΑΔΖ

Μονάδες 9

β. του τριγώνου ΔΕΖ

Μονάδες 7

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία. Παράγραφος 11.3 σχολικού βιβλίου σελ. 238.

Β.

α - Λ
β - Σ
γ - Λ
δ - Σ*.

Γ. Ορισμός σελ. 233 σχολικού βιβλίου.

***:** Η απάντηση στο **Β-δ** υποερώτημα είναι Σωστό, αφού διατυπώνεται θεώρημα που αναγράφεται ακριβώς έτσι στο σχολικό βιβλίο. Όμως, η ακριβέστερη διατύπωση αυτού του θεωρήματος θα έπρεπε αντί "Η διαφορά των τετραγώνων…" να ήταν "Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετραγώνων…".

ΘΕΜΑ 2ο

α. Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνΑ$,
οπότε $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot συνΑ$ ή
$3 = 2 - 2συνΑ$ ή $συνΑ = -(1/2)$ ή
$συνΑ = συν\frac{2\pi}{3}$.

Επειδή $0 < \hat{Α} < \pi$ είναι $Α = \frac{2\pi}{3}$ ή $Α = 120^\circ$.

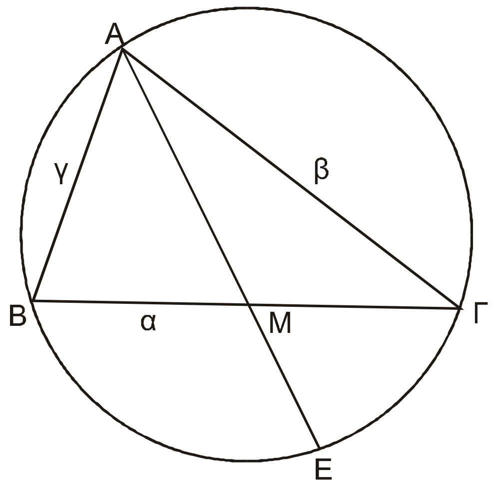
β. Από τον τύπο έχουμε: $Ε = \frac{1}{2}βγ \cdot ημΑ$

$$Ε = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot ημ\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ τ.μ.}$$

γ. Από το 1ο θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$μ_β^2 = \frac{2α^2 + 2γ^2 - β^2}{4} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 - 1^2}{4} = \frac{7}{4} \text{ οπότε } μ_β = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3^o



α. Εφαρμόζουμε το 1^o θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε:

$\beta^2+\gamma^2=2AM^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$ (1).

Η (1) λόγω της δοσμένης σχέσης $\beta^2+\gamma^2=3\alpha^2$, γράφεται:

$$3\alpha^2=2AM^2+\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2=3\alpha^2-\frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2=\frac{5\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AM^2=\frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow AM=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

β. Από το θεώρημα των τεμνομένων χορδών έχουμε:

$MA\cdot ME=MB\cdot M\Gamma=\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\alpha^2}{4}$. Επομένως:

$AM\cdot AE=AM\cdot(AM+ME)=AM^2+AM\cdot ME=$

$$=AM^2+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{5\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}=\frac{6\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{2}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΖ είναι:

$(A\Delta Z)=(1/2)\cdot A\Delta\cdot AZ\cdot \eta\mu A=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\alpha\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\alpha\right)\eta\mu 60^o=$$

$$=\frac{\alpha^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18}\ \tau.\mu.$$

β. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΕΔ είναι ίσα γιατί έχουν:

- $A\Delta=BE=(1/3)\alpha$
- $AZ=B\Delta=(2/3)\alpha$
- $\hat{A}=\hat{B}=60^o$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι και τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΖΓΕ είναι ίσα. Επομένως ισχύει ότι:

Τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΔΒΕ, ΖΓΕ είναι μεταξύ τους ίσα, οπότε είναι και ισοδύναμα. Συνεπώς:

(ΔΕΖ) = (ΑΒΓ) - 3(ΑΔΖ) = $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{6} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{12}$ τ.μ.

γ. Η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της ακτίνας R του περιγεγραμμένου σ' αυτό κύκλου είναι: $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.
Επειδή $\lambda_3 = \alpha$ προκύπτει ότι:

$$\alpha = R\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως το εμβαδόν του περιγεγραμμένου, στο τρίγωνο ΑΒΓ, κύκλου είναι:

$$E = \pi\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \pi\frac{3\alpha^2}{9} = \frac{\pi\alpha^2}{3} \quad \text{τ.μ.}$$