

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
2002

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
Μονάδες 4
- B.** Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.
Μονάδες 9
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.
- β.** Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:
$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$
- γ.** Αν a, β είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει:
 $a \cdot \beta \cdot [a, \beta] = (a, \beta)$ όπου $[a, \beta]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των a, β και (a, β) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a, β .
- δ.** Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.
Μονάδες 8
- Δ.** Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1) .
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	1. $yy_1 = \rho(x + x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	2. $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	3. $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	4. $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

- A.** Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

- B.** Να αποδείξετε ότι αν ο a είναι ακέραιος, τότε και ο $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

- Γ.** Αν ο a είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

- A.** την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Μονάδες 6

- B.** τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

- Γ.** την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

- A.** Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 9

- B.** Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.

Μονάδες 9

- Γ.** Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

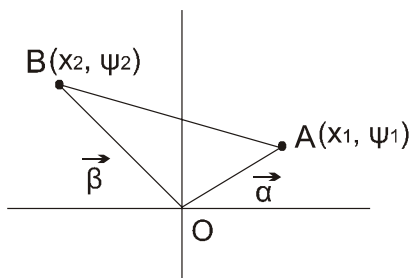
- A.** Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \varphi$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

- B.** Έστω $\vec{\alpha}(x_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$. Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.



Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $\triangle OAB$ έχουμε:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos\hat{AOB}$$

Όμως είναι:

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2$$

$$(OA)^2 = x_1^2 + \psi_1^2$$

και $(OB)^2 = x_2^2 + \psi_2^2$

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2 - x_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2 = x_1^2 + \psi_1^2 + x_2^2 + \psi_2^2 - 2(OA)(OB)\cos\hat{AOB}$$

ή μετά από πράξεις:

$$2x_1x_2 + 2\psi_1\psi_2 = +2(OA)(OB)\cos\hat{AOB}$$

και επειδή:

$$(OA)(OB)\cos(\hat{AOB}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

Προκύπτει τελικά ότι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + \psi_1\psi_2$$

Γ.

α	β	γ	δ
Σ	Λ	Λ	Σ

Δ.

Στήλη A	Στήλη B
α	2
β	3
γ	1
δ	6

ΘΕΜΑ 2ο

A. Έστω $\alpha = 2\kappa+1$ και $\beta = 2\lambda+1$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ δύο περιττοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= (2\kappa+1)(2\lambda+1) = \\ &= 4\kappa\lambda+2\kappa+2\lambda+1 = \\ &= 2(2\kappa\lambda+\kappa+\lambda)+1 = \\ &= 2\rho+1\end{aligned}$$

όπου $\rho = 2\kappa\lambda+\kappa+\lambda$ ακέραιος αριθμός.

Άρα το γινόμενο $\alpha \cdot \beta =$ περιττός αριθμός.

B.

(i) Αν α άρτιος ακέραιος αριθμός, δηλαδή $\alpha = 2\lambda$ με $\lambda \in \mathbb{Z}$ τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \frac{2\lambda(4\lambda^2+1)}{2} = \frac{2[\lambda(4\lambda^2+1)]}{2} = \lambda(4\lambda^2+1) \in \mathbb{Z}$$

(ii) Αν α περιττός ακέραιος αριθμός, δηλαδή $\alpha = 2\lambda+1$ με $\lambda \in \mathbb{Z}$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} &= \frac{(2\lambda+1)[(2\lambda+1)^2+1]}{2} = \\ &= \frac{(2\lambda+1)[4\lambda^2+4\lambda+1+1]}{2} = \\ &= \frac{(2\lambda+1)[4\lambda^2+4\lambda+2]}{2} = \\ &= \frac{2[(2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1)]}{2} = \\ &= (2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1) \in \mathbb{Z} \quad (1)\end{aligned}$$

Γ. Από το συμπέρασμα (1) του ερωτήματος Β έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha \cdot (\alpha^2+1)}{2} &= (2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1) = \\ &= (2\lambda+1)[2(\lambda^2+\lambda)+1] = \\ &= (2\lambda+1)(2\rho+1) \quad : \text{ περιττός ακέραιος λόγω του} \\ &\text{ερωτήματος Α με } \rho = \lambda^2+\lambda \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο

A. Η εξίσωση $y^2 = 4x$ γράφεται $y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$, οπότε είναι $\rho = 2$. Έτσι η εστία E έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$ ή $E(1,0)$. Η διευθετούσα είναι $x = -\frac{\rho}{2}$ ή $x = -1$.

B. Το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από την εστία $E(1,0)$ περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$(\eta\lambda): y - 0 = \lambda(x-1) \Leftrightarrow y = \lambda x - \lambda \Leftrightarrow \lambda x + (-1)y - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\varepsilon): x = 1.$$

$$d(0, \varepsilon) = 1 \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα η } (\varepsilon) \text{ δεν είναι λύση.}$$

Αναζητούμε έτσι $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$d(0, \eta_\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 = 2(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Έτσι προκύπτουν δύο ευθείες:

- α) Για $\lambda = 1$: $y = x - 1$.
 β) Για $\lambda = -1$: $y = -x + 1$.

- Γ.** Αν (ε') η ζητούμενη ευθεία και $A(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της (ε') με την παραβολή, η (ε') έχει τη μορφή:

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \text{ ή } yy_1 = 2(x + x_1).$$

Επειδή $y_1 \neq 0$ η τελευταία γράφεται $y = \frac{2}{y_1}x + 2\frac{x_1}{y_1}$.

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης προκύπτει $\lambda = \frac{2}{y_1}$.

Λόγω της παραλληλίας με την $y = x - 1$ πρέπει:

$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2.$$

Όμως $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε

$$y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow 2^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$y \cdot 2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

ΘΕΜΑ 4ο

- A.** Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$(x^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta) + (y^2 - 2y\eta\mu\theta) = 1 \text{ ή}$$

$$(x^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) + (y^2 - 2y\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta) = 2 \text{ ή}$$

$$(x - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (y - \eta\mu\theta)^2 = 2 \quad (1)$$

Η τελευταία όμως παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ και ακτίνα

$$\rho = \sqrt{2}.$$

- B.** Από την εξίσωση (1) για $\theta = \frac{\pi}{2}$, προκύπτει ο κύκλος:

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2 \text{ του οποίου το κέντρο είναι } K(0,1).$$

Είναι: $\lambda_{KM} = \frac{y_M - y_K}{x_M - x_K} = \frac{2-1}{1-0} = 1$. Επειδή η εφαπτομένη ευθεία στο M

είναι κάθετη στην ευθεία KM , προκύπτει ότι θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$ και εξίσωση:

$$y - 2 = -1(x - 1).$$

$$\text{Άρα } y = -x + 3.$$

Γ. Οι συντεταγμένες x, y των κέντρων των παραπάνω κύκλων είναι:

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta, y = \eta\mu\theta.$$

$$\text{Έτσι προκύπτει } x^2 + y^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta \text{ ή } x^2 + y^2 = 1.$$

Άρα τα κέντρα αυτά βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.